0.1 分類空間

Topological category からはその分類空間を構成できる。これは、topological monoid や small category の分類空間の一般化になっている。いずれにしても、simplicial space、simplicial set の category を経由して、その幾何学的実現を取るというもので、small category の場合には CW complex として実現される。

Definition 0.1.1

X_* が simplicial space とは、空間列 $\{X_n\}_{n\geqq 0}$ と、その間の連続写像、$d^j : X_n \longrightarrow X_{n-1}$, $s^i : X_n \longrightarrow X_{n+1}$ $(0 \leqq i, j \leqq n)$ が与えられ、ある条件を満たすものである。特に、空間が discrete のとき、simplicial set と呼ぶ。

Δ^n を n 次単体とし、

$$d_j : \Delta^{n-1} \longrightarrow \Delta^n \ , \ s_i : \Delta^{n+1} \longrightarrow \Delta^n \quad (0 \leqq i, j \leqq n)$$

をそれぞれ、j-th face への inclusion と、i-th face への押しつぶしとする。このとき、

$$|X_*| = \coprod \Delta^n \times X_n / \sim$$

と定義する。ただし、$t \in \Delta^{n-1}, x \in X_n$ に対し、$(d_j(t), x) \sim (t, d^j(x))$。また、$s \in \Delta^{n+1}, y \in X_n$ に対し、$(s_i(t), y) \sim (t, s^i(y))$。これを X_* の幾何学的実現とよぶ。

$$| - | : \textbf{Simplicial space} \longrightarrow \textbf{Space}$$

は functor となる。

Definition 0.1.2

D を topological category とする。このとき、simplicial space、$N_*(D)$ を次のように定義する。

$$N_p(D) = \{ \ (f_1, \cdots, f_p) \in \mathrm{Mor}(D)^p \mid t(f_{i-1}) = s(f_i) \ 1 \leqq i \leqq p\}$$

そして、$d^j : N_p(D) \longrightarrow N_{p-1}(D)$, $s^i : N_p(D) \longrightarrow N_{p+1}(D)$ は、

$$d^j(f_1, \cdots, f_p) = (f_1, \cdots, f_j \circ f_{j+1}, \cdots, f_p) \ , \ s^i(f_1, \cdots, f_p) = (f_1, \cdots, f_i, 1, f_{i+1}, \cdots, f_p) \ (0 \leqq i, j \leqq p)$$

で定義する。ただし、$N_0X = \mathrm{ob}(D)$, $N_1X = \mathrm{Mor}(D)$ で $d^0 = t$, $d^1 = s : N_1X \longrightarrow N_0X$ であり、$s^1 = i : N_0X \longrightarrow N_1X$ である。N_*D を D の nerve とよび、この幾何学的実現 $|N_*D|$ を D の分類空間と呼び、BD などと書く。

Example 0.1.3

object が 1 つで morphism が恒等射のみの category である $D = \{\phi\}$ を考える。このとき、任意の p に対し、$N_p(D) = *$ であり、$BD = \coprod_{n\geqq 0} \Delta^n \times */\sim$ であるが、ここで、同値関係を考えると、任意の $t \in \Delta^n$ に対し、$(t, * = s^i(*)) \sim (s_i(t), *) \sim \cdots \sim (*, *)$ なので、$|N_*(D)|$ は一点空間である。

Example 0.1.4

$D = \{x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{g} z\}$ を考える。Example 0.1.3 より、恒等射は省略して考えてよい。

$$N_0X = \{x, y, z\}\ ,\ N_1X = \{f, g, fg\}\ ,\ N_2X = \{(f, g)\}$$

であり、

$$BD = \Delta^0 \times \{x, y, z\} \coprod \Delta^1 \times \{f, g, fg\} \coprod \Delta^2 \times \{(f, g)\} = \Delta^2$$

同様に、$D = \{a_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_n\}$ のとき、$BD = \Delta^n$

Example 0.1.5

M : topological monoid は $\mathrm{ob}(M) = *$、$\mathrm{Mor}(M) = M$ という topological category と考えられる。このとき、$N_kM = M^k$ である。

Proposition 0.1.6

$B(C \times D) \cong BC \times BD$ である。

proof)　$|-| : \mathrm{Sspace} \longrightarrow \mathrm{Space}$ と、$N_* : \text{top-cat} \longrightarrow \mathrm{SSpace}$ がそれぞれ product を保つことを示せばよい。

$\square$

Proposition 0.1.7

$F, G : C \longrightarrow D$: continuos functor に対し、$\alpha : F \longrightarrow G$ を continuos natural transformation とする。このとき、$BF \simeq BG : BC \longrightarrow BD$ となる。

proof)　$I = \{0 \longrightarrow 1\}$ という、small category と考える。$\alpha : F \longrightarrow G$ より、

$$A : C \times I \longrightarrow D$$

を、object 対応は、$A(c, 0) = F(c)$, $A(c, 1) = G(c)$ で定義し、morphism 対応は、

$$\mathrm{Hom}_{C\times I}((x, i), (y, j)) = \mathrm{Hom}_C(x, y) \times \mathrm{Hom}_I(i, j) \longrightarrow \mathrm{Hom}_D(A(x, i), A(y, j))$$

を考えればよいのだが、$i = j = 0$ のときは、$\mathrm{Hom}(i, j) = *$ なので、

$$F : \mathrm{Hom}_{C\times I}((x, 0), (y, 0)) = \mathrm{Hom}_C(x, y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_D(A(x, 0), A(y, 0)) = \mathrm{Hom}(Fx, Fy)$$

とすればよい。同様に、$i = j = 1$ の場合は、G で移せばよい。$i = 1, j = 0$ の場合は $\mathrm{Hom}_I(1, 0) = \phi$ なので、考えなくて良い。残るは、$i = 0, j = 1$ の場合、$\mathrm{Hom}_I(0, 1) = *$ である。

$$\mathrm{Hom}_{C\times I}((x, 0), (y, 1)) = \mathrm{Hom}_C(x, y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_D(A(x, 0), A(y, 1)) = \mathrm{Hom}(Fx, Gy)$$

は、$f \in \mathrm{Hom}_C(x, y)$ に対し、$\alpha_y \circ F(f) = G(f) \circ \alpha_x \in \mathrm{Hom}(Fx, Gy)$ を対応させればよい。これより、

$$BA : B(C \times I) \cong BC \times I \longrightarrow D$$

となり、

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "F"] \arrow[d, "i_0"'] & D \arrow[d, "="] \\ C \times I \arrow[r, "A"] & D \end{tikzcd}$$

は可換で、B を施して、

$$\begin{tikzcd} BC \arrow[r, "="] \arrow[d, "i_0"'] & BC \arrow[r, "BF"] \arrow[d, "Bi_0"'] & BD \arrow[d, "="] \\ BC \times I \arrow[r, "\cong"'] & B(C \times I) \arrow[r, "BA"] & BD \end{tikzcd}$$

が可換となるため、BA が BF と BG を繋ぐ homotopy となる。

$\square$

Corollary 0.1.8

$F : C \Longleftrightarrow D : G$ ならば、$BC \simeq BD$ で、BF, BG が互いに homotopy inverce である。

proof)　Adjoint の定義から、$GF \longrightarrow 1_C$、そして、$FG \longrightarrow 1_D$ という natural transformation が存在するので、Prop 0.1.7 により示される。

$\square$

Corollary 0.1.9

$F : C \longrightarrow D$ が equivalence of category ならば、BF は homotopy equivalence である。

Proposition 0.1.10

C が initial object、あるいは terminal object を持つならば、BC は contractible である。

proof)　incial object $\phi \in C$ を持てば、natural transformation

$$\alpha : c_\phi \longrightarrow 1_C : C \longrightarrow C$$

を持つ。これより、$Bc_\phi \simeq B1_C : BC \longrightarrow BC$ を導くが、これは、$c_\phi \simeq 1_{BC}$ ということであり、これより BC は ϕ に contrabtible である。terminal object を持つ場合でも同様に示せる。

$\square$